13

НЕПОСТИЖИМАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ[1])

«...по-видимому, здесь есть какая-то тайна, которую нам еще предстоит раскрыть».

Ч. С. Пирс

Рассказывают такую историю. Встретились как-то раз два приятеля, знавшие друг друга еще со студенческой скамьи, и разговорились о том, кто чем занимается. Один из приятелей стал статистиком и работал в области прогнозирования изменения численности народонаселения. Оттиск одной из своих работ статистик показал бывшему соученику. Начиналась работа, как обычно, с гауссова распределения. Статистик растолковал своему приятелю смысл используемых в работе обозначений для истинных показателей народонаселения, для средних и т. д. Приятель был немного недоверчив и отнюдь не был уверен в том, что статистик его не разыгрывает.

— Откуда тебе известно, что все обстоит именно так, а не иначе? — спросил он. — А это что за символ?

— Ах, это, — ответил статистик. — Это число π.

— А что оно означает?

— Отношение длины окружности к ее диаметру.

— Ну, знаешь, говори, да не заговаривайся, — обиделся приятель статистика. — Какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности?

Наивность восприятия друга нашего статистика вызывает у нас улыбку. Тем не менее, когда я слушал эту историю, меня не покидало смутное беспокойство, ибо реакция приятеля была не чем иным, как проявлением здравого смысла. Еще большее замешательство я испытал через несколько дней, когда один из моих студентов выразил удивление по поводу того, что для проверки своих теорий мы отбираем лишь крайне незначительное число данных[2]).

«Представим себе, — сказал студент, — что мы хотим создать теорию, пригодную для описания явлений, которыми мы до сих пор пренебрегали, и непригодную для описания явлений, которые казались нам имеющими первостепенное значение. Можем ли мы заранее утверждать, что построить такую теорию, имеющую

---

[1]) Доклад прочитан 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете на Курантовских математических лекциях. Опубликован в журнале: Comm. Pure and Appl. Math., **13**, 1 (1960).

[2]) Речь идет о замечании Вернера, в то время студента Принстонского университета.

мало общего с существующей ныне, но тем не менее позволяющую объяснять столь же широкий круг явлений, нельзя?» Я вынужден был признать, что особенно убедительных доводов, исключающих возможность существования такой теории, нет.

Две рассказанные истории служат иллюстрациями двух главных тем моего доклада. Первой — о том, что между математическими понятиями подчас возникают совершенно неожиданные связи и что именно эти связи позволяют нам удивительно точно и адекватно описывать различные явления природы. Второй — о том, что в силу последнего обстоятельства (поскольку мы не понимаем причин, делающих математические понятия столь эффективными) мы не можем утверждать, является ли теория, сформулированная на языке этих понятий, единственно возможной. Мы находимся в положении, несколько аналогичном положению человека, держащего в руках связку ключей и пытающегося открыть одну за другой несколько дверей. Рано или поздно ему всегда удается подобрать ключ к очередной двери, но сомнения относительно взаимно однозначного соответствия между ключами и дверями у него остаются.

Бóльшая часть того, что будет здесь сказано, не отличается новизной; в той или иной форме аналогичные идеи, по-видимому, приходили в голову многим ученым. Моя основная цель заключается в том, чтобы рассмотреть эти идеи с нескольких сторон. Во-первых, обратить внимание на чрезвычайную эффективность математики в естественных науках как на нечто загадочное, не поддающееся рациональному объяснению. Во-вторых, показать, что именно эта сверхъестественная эффективность математических понятий поднимает вопрос о единственности физических теорий. Для обоснования тезиса о непостижимо важной роли, которую математика играет в физике, я постараюсь кратко ответить на вопросы: что такое математика и что такое физика? Затем мы рассмотрим, каким образом математика входит в физические теории и, наконец,— почему успехи математики в физике кажутся нам столь непостижимыми. Гораздо меньше будет сказано по второму тезису о единственности физических теорий. Обстоятельный ответ на этот вопрос потребовал бы огромной работы как в области теории, так и в области эксперимента; к этой работе мы по существу до сих пор еще и не приступали.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Кто-то сказал, что философия — это злоупотребление специально разработанной терминологией [1]. Следуя духу этого высказывания, я мог бы определить математику как науку о хи-

[1] Приведенное замечание принадлежит Дубиславу [1].

троумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями. Особенно важная роль при этом, разумеется, отводится придумыванию новых понятий. Запас интересных теорем в математике быстро иссяк бы, если бы их приходилось формулировать лишь с помощью тех понятий, которые содержатся в формулировках аксиом. Но это еще не все. Понятия элементарной математики, и в частности элементарной геометрии, были, бесспорно, сформулированы для описания объектов, заимствованных непосредственно из реального мира. Аналогичное утверждение относительно более сложных математических понятий, в том числе понятий, играющих важную роль в физике, по-видимому, неверно. Например, правила действий над парами чисел были, очевидно, специально придуманы так, чтобы мы могли получать результаты, совпадающие с результатами действий над дробями. С правилами же этих действий мы знакомились, ничего не зная о «парах чисел». Правила действий, производимых над последовательностями, т. е. над иррациональными числами, также относятся к категории правил, которые были сформулированы так, что воспроизводили правила действий над уже известными нам величинами. Более тонкие математические понятия — комплексные числа, алгебры, линейные операторы, борелевские множества и т. д. (этот список можно было бы продолжать почти до бесконечности) — были задуманы как подходящие объекты, с помощью которых математик мог продемонстрировать гибкость своего ума, способность воспринимать формальную красоту. Действительно, определение этих понятий и ясное понимание того, в каких интересных и тонких рассуждениях их можно было бы использовать, служит первым свидетельством остроумия придумавшего их математика. О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удается использовать это понятие. Великий математик полностью владеет всем арсеналом допустимых приемов мышления и, действуя подчас весьма рискованно, балансирует на самой грани допустимого. Уже одно то, что его безрассудство не завело его в пучину противоречий, само по себе чудо. Трудно поверить, что дарвиновский процесс естественного отбора довел наше мышление до такой степени совершенства, которой оно, судя по всему, обладает. Однако это не наша тема. Основная мысль, к которой нам еще предстоит вернуться, состоит в другом: не вводя других понятий, кроме содержащихся в аксиомах, математик смог бы сформулировать лишь весьма ограниченное число интересных теорем, и новые понятия он вводит именно так, чтобы над ними можно было производить хитроумные логические операции, которые импонируют нашему чувству прекрасного сами по себе и по получаемым с их помощью результатам, обладающим большой простотой и общностью[1]).

Особенно яркой иллюстрацией сказанного служат комплексные числа. Ничто в имеющемся у нас опыте, очевидно, не наводит на мысль о введении этих величин. Если же мы спросим у математика о причинах его интереса к комплексным числам, то он с негодованием укажет на многочисленные изящные теоремы в теории уравнений, степенных рядов и аналитических функций в целом, обязанных своим появлением на свет введению комплексных чисел. Математик отнюдь не склонен отказываться от наиболее прекрасных творений своего гения[2]).

ЧТО ТАКОЕ ФИЗИКА?

Физик видит свою задачу в открытии законов неодушевленной природы. Чтобы смысл этого утверждения стал ясным, необходимо проанализировать понятие «закон природы».

Окружающий нас мир поразительно сложен, и самая очевидная истина заключается в том, что мы не в состоянии предсказать его будущее. В известном анекдоте лишь оптимист считает будущее неопределенным, тем не менее в данном случае оптимист прав: будущее непредсказуемо. Как заметил однажды Шредингер, «чудо, что, несмотря на поразительную сложность мира, мы можем обнаруживать в его явлениях определенные закономерности»[3]).

Одна из таких закономерностей, открытая Галилеем, состоит в том, что два камня, брошенные в один и тот же момент времени с одной и той же высоты, упадут на землю одновременно. Именно о таких закономерностях и идет речь в законах природы. Галилеева закономерность стала прототипом широкого класса закономерностей. Удивительной же ее следует считать по двум причинам.

Во-первых, удивительно, что эта закономерность наблюдается не только в Пизе и не только во времена Галилея, но и в любом другом месте земного шара; она была и будет верной всегда. Это свойство закономерности есть не что иное, как известное свойство инвариантности. Некоторое время назад [7]

---

[1]) Поляни [2] (на стр. 188) говорит следующее: «Все упомянутые выше трудности проистекают единственно из нашего нежелания понять, что математику как науку нельзя определить, не признав ее наиболее очевидного свойства — того, что она интересна».

[2]) В этой связи читателю будет небезынтересно ознакомиться с весьма красочными замечаниями Гильберта об интуиционизме, который пытается «подорвать и обезобразить математику» (см. [3, 4]).

[3]) См. работу Шредингера [5], а также работу Дубислава [6].

я уже имел случай заметить, что без принципов инвариантности, аналогичных тем, которые вытекают из приведенного выше обобщения замеченного Галилеем опытного факта, физика не могла бы существовать.

Вторая удивительная особенность закономерности, открытой Галилеем, состоит в том, что она не зависит от многих условий, от которых в принципе могла бы зависеть. Закономерность наблюдается безотносительно к тому, идет ли дождь или нет, проводится ли эксперимент в закрытой комнате или камень бросают с Пизанской падающей башни и кто бросает камень — мужчина или женщина. Закономерность остается верной, если двое разных людей одновременно бросают с одинаковой высоты два камня. Существует, очевидно, бесчисленное множество других условий, не существенных для выполнимости открытой Галилеем закономерности. Несущественность столь многих обстоятельств, которые могли бы играть роль в наблюдаемом явлении, мы также называем инвариантностью [7]. Однако эта инвариантность носит несколько иной характер, чем предыдущая, поскольку ее нельзя сформулировать в качестве общего принципа. Исследование условий, влияющих и, наоборот, не влияющих на свободное падение тел, явилось частью первых экспериментальных исследований поля силы тяжести. Лишь искусство и изобретательность экспериментатора позволяют ему выбирать явления, зависящие от сравнительно узкого круга достаточно легко реализуемых и воспроизводимых условий[1]). В рассматриваемом нами примере наиболее важным шагом послужило то обстоятельство, что Галилей ограничил свои наблюдения сравнительно тяжелыми телами. И вновь мы должны признать, что, не будь явлений, зависящих лишь от небольшого, легко обозримого числа условий, физика не могла бы существовать.

Хотя обе названные выше особенности замеченной Галилеем закономерности и представляются весьма важными с точки зрения философа, они не были особенно удивительными для Галилея и не содержат в себе никакого закона природы. Закон природы содержится в утверждении: время, в течение которого тяжелое тело падает с заданной высоты, не зависит от размеров, материала и формы падающего тела. В рамках ньютоновского второго «закона» это утверждение эквивалентно утверждению о том, что сила тяжести, действующая на падающее тело, пропорциональна его массе, но не зависит от его размеров, материала и формы.

Проведенный выше анализ преследовал одну цель — напомнить, что существование «законов природы» не столь уж есте-

---

[1]) В этой связи см. также яркий очерк Дейча [8]. Шимони обратил мое внимаиие на аналогичную мысль у Пирса [9].

ственно и самоочевидно и что способность человека тем не менее открывать законы природы еще более удивительна[1]). Автор уже имел возможность некоторое время тому назад [11][2]) обратить внимание читателей на иерархию «законов природы» — последовательность слоев, каждый из которых содержит более широкие и общие законы природы, чем предыдущий, а открытие его означает более глубокое по сравнению с уже известными слоями проникновение в строение Вселенной. Однако в интересующем нас случае наиболее важным является то, что все эти законы природы вместе со всеми, пусть даже самыми далекими следствиями из них, охватывают лишь незначительную часть наших знаний о неодушевленном мире. Все законы природы — это условные утверждения, позволяющие предсказывать какие-то события в будущем на основе того, что известно в данный момент, причем для предсказания будущего некоторые аспекты состояния мира в данный момент (практически подавляющее большинство условий, определяющих это состояние) несущественны. Несущественность здесь понимается в смысле второй особенности, упоминавшейся при анализе открытой Галилеем закономерности[3]).

Законы природы хранят молчание относительно всего, что касается состояния мира в данный момент, например существования Земли, на которой мы живем и на которой Галилей проводил свои эксперименты, существования Солнца и всего, что нас окружает. Отсюда следует, что законы природы можно использовать для предсказания будущего лишь в исключительных обстоятельствах, а именно лишь тогда, когда известны все существенные (для предсказания будущего) условия, определяющие состояние мира в данный момент. Отсюда же следует, что создание машин, функционирование которых физик может предвидеть заранее, является наиболее эффектным его достижением. В этих машинах физик создает ситуацию, при которой все существенные параметры известны и поведение машины предсказуемо. Примерами таких машин могут служить радары и ядерные реакторы.

Главная цель, которую мы преследовали до сих пор, — показать, что все законы природы представляют собой некие условные утверждения и охватывают лишь очень небольшую часть наших знаний об окружающем мире. Так, классическая механика — наиболее известный прототип физической теории —

---

[1]) Шредингер [10] говорит, что второе чудо также может выходить за рамки человеческого понимания.

[2]) См. также работу Маргенау [12].

[3]) Автор считает излишним напоминать о том, что приведенная выше формулировка закона Галилея не исчерпывает полностью содержания выполненных Галилеем наблюдений по выяснению законов свободного падения тел.

позволяет указывать по известным координатам и скоростям любых тел вторые производные от координат этих тел по времени, но ничего не говорит о существовании самих тел и значениях их координат и скоростей в данный момент времени. Истины ради следует упомянуть и о том, что, как стало известно лет тридцать назад, даже условные утверждения, в форме которых мы выражаем законы природы, не являются абсолютно точными, поскольку представляют собой лишь вероятностные законы. Опираясь на них и используя то, что нам известно о состоянии неодушевленного мира в данный момент, мы можем лишь заключать более или менее разумные пари о его будущих свойствах. Вероятностный характер законов природы не позволяет нам высказывать никаких категорических утверждений, даже если ограничиться категорическими утверждениями, содержание которых обусловлено состоянием мира в данный момент. Вероятностный характер «законов природы» проявляется и в случае машин, и его нетрудно обнаружить, по крайней мере в ядерных реакторах, работающих в режиме очень малой мощности. Тем не менее область знаний, охватываемая законами природы, подвержена дополнительным ограничениям, вытекающим из вероятностного характера этих законов[1]) (в дальнейшем эти ограничения не будут играть для нас никакой роли).

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ

Освежив в памяти наиболее существенные черты математики и физики, мы можем теперь лучше разобраться в той роли, которую математика играет в физических теориях.

В своей повседневной работе физик использует математику для получения результатов, вытекающих из законов природы, и для проверки применимости условных утверждений этих законов к наиболее часто встречающимся или интересующим его конкретным обстоятельствам. Чтобы это было возможным, законы природы должны формулироваться на математическом языке. Однако получение результатов на основе уже существующих теорий — отнюдь не самая важная роль математики в физике. Исполняя эту функцию, математика, или, точнее, прикладная математика, является не столько хозяином положения, сколько средством для достижения определенной цели.

Математике, однако, отводится в физике и другая, более «суверенная» роль. Суть ее содержится в утверждении, сделанном нами при обсуждении роли прикладной математики: чтобы стать объектом применения прикладной математики, законы

[1]) См., например, работу Шредингера [5].

природы должны формулироваться на языке математики. Утверждение о том, что природа выражает свои законы на языке математики, по существу было высказано 300 лет назад [1]). В наши дни оно верно более чем когда-либо. Чтобы продемонстрировать всю важность использования математических понятий при формулировке законов физики, достаточно вспомнить, например, аксиомы квантовой механики, сформулированные в явном виде великим математиком фон Нейманом [14] и в неявном виде великим физиком Дираком [13]. В основу квантовой механики положены два понятия: понятие состояний и понятие наблюдаемых. Состояния — это векторы в гильбертовом пространстве; наблюдаемые — самосопряженные операторы, действующие на векторы состояния. Возможные значения наблюдаемых определяются собственными значениями этих операторов и т. д., но мы предпочитаем остановиться на этом и не перечислять математических понятий, развитых в теории линейных операторов.

Разумеется, для формулировки законов природы физики отбирают лишь некоторые математические понятия, используя, таким образом, лишь небольшую долю всех имеющихся в математике понятий. Правда, понятия выбираются из длинного списка математических понятий не произвольно: во многих, если не в большинстве, случаях необходимые понятия были независимо развиты физиками, и лишь впоследствии было установлено их тождество с понятиями, уже известными математикам. Однако утверждать, как это нередко приходится слышать, будто так происходит потому, что математики используют лишь простейшие из возможных понятий, а последние встречаются в любом формализме, было бы неверно. Как мы уже видели, математические понятия вводятся не из-за их логической простоты (даже последовательности пар чисел — понятия далеко не простые), а потому, что они особенно легко поддаются тонким логическим операциям и облегчают проведение глубоких и блестящих рассуждений. Не следует забывать, что гильбертово пространство квантовой механики — это комплексное гильбертово пространство с эрмитовым скалярным произведением. Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее использование комплексных чисел в квантовой механике отнюдь не является вычислительным трюком прикладной математики, а становится почти необходимым при формулировке законов квантовой механики. Кроме того, по-видимому, не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено сыграть решающую

[1]) Его приписывают Галилею.

роль в формулировке квантовой теории. Я имею в виду быстро развивающуюся теорию дисперсных соотношений.

Невольно создается впечатление, что чудо, с которым мы сталкиваемся здесь, не менее удивительно, чем чудо, состоящее в способности человеческого разума нанизывать один за другим тысячи аргументов, не впадая при этом в противоречие, или два других чуда — существование законов природы и человеческого разума, способного раскрыть их. Из всего, что мне известно, больше всего похоже на объяснение плодотворности использования математических понятий в физике замечание Эйнштейна: «Мы с готовностью воспринимаем лишь те физические теории, которые обладают изяществом». Может показаться спорным, что понятия математики, постижение которых требует напряженной работы мысли, обладают изяществом. Замечание Эйнштейна в лучшем случае отражает определенные особенности теории, в которую мы готовы поверить, и не затрагивает внутренней непротиворечивости теории. Рассмотрению последней проблемы посвящается следующий раздел нашего доклада.

ТАК ЛИ УЖ УДИВИТЕЛЕН УСПЕХ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ?

Почему физик использует математику для формулировки своих законов природы? Это можно объяснить тем, что физик довольно безответственно относится к своим действиям. В результате, когда он обнаруживает связь между двумя величинами, напоминающую какую-нибудь связь, хорошо известную в математике, он тотчас же делает вывод, что обнаруженная им связь и *есть* именно та связь, поскольку никакие другие связи того же типа ему неизвестны. В своем докладе я вовсе не собираюсь опровергать выдвигаемое против физика обвинение в том, что он ведет себя несколько безответственно. В какой-то мере этот упрек справедлив. Важно заметить, однако, что математическая формулировка полученных физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений. Это свидетельствует о том, что математический язык служит не только средством общения, но и является единственным языком, на котором мы можем говорить. Правильно будет сказать, что математический язык отвечает существу дела. Рассмотрим несколько примеров.

Первый пример встречается особенно часто — это движение планет. Законы свободного падения были надежно установлены в результате экспериментов, проведенных главным образом в Италии. Эти эксперименты не могли быть очень точными в том смысле, как мы понимаем точность сегодня, отчасти из-за сопротивления воздуха, отчасти из-за того, что во времена Галилея еще не умели измерять короткие промежутки времени. Тем не менее не удивительно, что в результате этих исследований итальянские физики узнали о том, как движутся тела сквозь атмосферу. Затем Ньютон сопоставил закон свободного падения тел с движением Луны, заметив, что параболическая траектория падающего камня на Земле и круговая орбита Луны на небе являются частными случаями одного и того же математического объекта — эллипса. Ньютон постулировал свой закон всемирного тяготения, опираясь на единственное и в те времена весьма грубое численное совпадение. С философской точки зрения сформулированный Ньютоном закон тяготения противоречил и духу того времени и самому Ньютону. С точки зрения эксперимента закон всемирного тяготеиия был основан на весьма отрывочных иаблюдеииях. Математический язык, иа котором этот закон был сформулирован, использует понятие второй производной, а те из нас, кто хоть раз пытался провести соприкасающуюся окружность к какой-нибудь кривой, зиают, что понятие второй производной не слишком наглядио. Закон всемирного тяготения, который Ньютон, не желая того, установил и который он мог проверить лишь с точностью около 4%, при проверке оказался правильным с точностью до 0,0001% и настолько тесно ассоциировался с представлением об абсолютной точности, что физики лишь недавно осмелились вновь заняться исследованием пределов его точности [15]. На пример с законом Ньютона ссылались и ссылаются миогие авторы. Мы не могли не привести его первым как фундаментальиый пример закона, формулируемого с помощью простых с точки зреиия математика понятий и обладающего точностью, лежащей далеко за пределами всякого разумного ожидания. Воспользуемся этим примером для того, чтобы еще раз сформулировать наш основной тезис: во-первых, закон всемирного тяготеиия (отчасти потому, что в его формулировку входит понятие второй производной) прост лишь для математика, но отнюдь не для обыкновенного здравомыслящего человека и даже не для первокурсника, если тот не обладает математическими способностями; во-вторых, закон всемирного тяготения — это условный закон с весьма ограниченной сферой применимости. Он ничего не говорит ни о Земле, притягивающей те камни, которые бросал Галилей, ни о круговой форме лунной орбиты, ни о планетах солнечной системы. Объяснение всех этих начальных условий остается на долю геолога и астронома, и задача, стоящая перед ними, отнюдь не легка.

Вторым примером служит обычная элементарная квантовая механика. Последняя берет свое начало с того момента, когда Макс Борн заметил, что некоторые правила вычислений, разработанные Гейзенбергом, формально совпадают с давно известными математикам правилами действий над матрицами. Борн, Иордан и Гейзенберг предложили заменить матрицами переменные, отвечающие координатам и скоростям в уравнениях классической механики [16, 17]. Они применили правила матричной механики к решению нескольких сильно идеализированных проблем и пришли к весьма удовлетворительным результатам, однако в те времена не было разумных оснований надеяться, что построенная ими матричная механика окажется верной и при более реальных условиях. Сами авторы надеялись, что предложенная ими «механика в основном окажется верной». Первым, кто несколькими месяцами позже применил матричную механику к решению реальной задачи — атому водорода, — был Паули. Полученные им результаты оказались в хорошем согласии с экспериментом. Такое положение дел вызывало удовлетворение, но было еще объяснимым, поскольку при выводе своих правил Гейзенберг исходил из проблем, в число которых входила старая теория атома водорода. Чудо произошло лишь тогда, когда матричную механику или математически эквивалентную ей теорию применили к задачам, для которых правила Гейзенберга не имели смысла. При выводе правил Гейзенберг предполагал, что классические уравнения движения допускают решения, обладающие определенными свойствами периодичности. Уравнения же движения двух электронов в атоме гелия (или еще большего числа электронов в более тяжелых атомах) не обладают этими свойствами, и правила Гейзенберга в этих случаях неприменимы. Тем не менее основное состояние гелия, вычисленное несколько месяцев спустя Киноситой в Корнелльском университете и Бэзли в Бюро стандартов, в пределах точности наблюдений, составлявшей около 0,0000001, находилось в согласии с экспериментальными данными. В этом случае мы поистине извлекли из уравнений нечто такое, что в них не закладывали.

Аналогичная ситуация возникла и при изучении качественных особенностей «сложных спектров», т. е. спектров тяжелых атомов. Я вспоминаю один разговор с Иорданом, который сказал следующее: «Когда были получены качественные закономерности спектров, последняя возможность изменить основы матричной механики состояла в том, чтобы обнаружить противоречие между правилами, выведенными из квантовой механики, и правилами, установленными в результате экспериментальных исследований». Иначе говоря, Иордан понимал, насколько беспомощными мы оказались бы (по крайней мере временно), если бы в теории атома гелия неожиданно возникло противоречие. Теорию атома гелия в то время разрабатывали Келлнер и Хилераас. Используемый ими математический формализм был слишком ясен и незыблем, и, не произойди упомянутое выше чудо с гелием, кризис был бы неизбежен. Разумеется, физика сумела бы так или иначе преодолеть этот кризис. Верно и другое: физика в том виде, как мы знаем ее сегодня, не могла бы существовать, если бы постоянно не повторялись чудеса, подобные чуду с атомом гелия, которое, по-видимому, следует считать наиболее удивительным, но далеко не единственным событием во всей истории развития элементарной квантовой механики. Перечень таких чудес можно было бы неограниченно продолжать. Квантовая механика достигла многих почти столь же удивительных успехов, и это вселяет в нас уверенность в том, что она, как мы говорим, верна.

В качестве последнего примера рассмотрим квантовую электродинамику, или теорию лэмбовского сдвига. В то время как ньютоновская теория тяготения еще обладала наглядными связями с опытом, в формулировку матричной механики опыт входит лишь в утонченной и сублимированной форме правил Гейзенберга. Квантовая теория лэмбовского сдвига, основные идеи которой выдвинул Бете, была разработана Швингером. Это чисто математическая теория, и единственный вклад эксперимента в нее состоял в доказательстве существования предсказываемого ею измеримого эффекта. Согласие с вычислениями оказалось лучше 0,001.

Предыдущие три примера (число их можно было бы увеличить почти до бесконечности) призваны были продемонстрировать эффективность и точность математической формулировки законов природы с помощью специально отобранных «удобных в обращении» понятий; выяснилось, что «законы природы» обладают почти фантастической точностью, но строго ограниченной сферой применимости. Я предлагаю назвать закономерность, подмеченную на этих примерах, эмпирическим законом эпистемологии. Вместе с принципами инвариантности физических теорий эмпирический закон эпистемологии служит прочным основанием этих теорий. Не будь принципов инвариантности, физические теории нельзя было бы подкреплять экспериментом. Не будь эмпирического закона эпистемологии, нам не хватило бы мужества и уверенности — эмоциональных предпосылок, без которых нельзя было бы успешно исследовать «законы природы». Сакс, с которым я обсуждал эмипирический закон эпистемологии, назвал его догматом веры физика-теоретика и был, несомненно, прав. Однако то, что он назвал нашим догматом веры, подкрепляется примерами из практики, куда более многочисленными, чем три примера, приведенные в нашем докладе.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Эмпирическая природа сделанных выше замечаний представляется мне самоочевидной. Они явно не принадлежат к числу «логически необходимых», и, чтобы доказать это, вовсе не нужно указывать на то, что они применимы лишь к очень незначительной части наших знаний о неодушевленном мире. Было бы нелепо считать, будто существование простых с точки зрения математика выражений для второй производной от координат по времени самоочевидно, в то время как аналогичных выражений для самой координаты или скорости не существует. Тем большее удивление вызывает та готовность, с которой чудесный дар, содержащийся в эмпирическом законе эпистемологии, был воспринят как нечто само собой разумеющееся. Способность человеческого разума нанизывать, оставаясь «правым» (т. е. не впадая в противоречие), цепочки из 1000 и более аргументов — дар, не менее удивительный.

Каждый эмпирический закон обладает тем неприятным свойством, что пределы его применимости неизвестны. Мы уже убедились в том, что закономерности в явлениях окружающего нас мира допускают формулировку с помощью математических понятий, обладающую сверхъестественной точностью. С другой стороны, в окружающем нас мире имеются и такие явления, рассматривая которые, мы не уверены, что между ними существуют какие-либо точные закономерности. Такие явления мы называем начальными условиями. Вопрос, который возникает в этой связи, состоит в следующем: не сольются ли различные закономерности, т. е. различные законы природы, которые будут открыты, в единое непротиворечивое целое или, по крайней мере, не обнаружат ли они асимптотическую тенденцию к такому слиянию? В противном случае мы всегда могли бы указать законы природы, не имеющие между собой ничего общего. Именно так, по крайней мере, обстоит дело с законами наследственности и законами физики. Может случиться даже так, что следствия из некоторых законов природы будут противоречить друг другу, но мы не захотим отказаться ни от одного из законов, поскольку каждый из них в своей области достаточно убедителен. Обнаружив противоречие между отдельными законами природы, мы можем покориться такой ситуации и потерять интерес к разрешению конфликта между различными теориями. Мы можем разочароваться в поисках «абсолютной истины», т. е. непротиворечивой картины, образующейся при слиянии в единое целое маленьких картинок, отражающих различные аспекты природы.

Обе альтернативы полезно проиллюстрировать на примере. В современной физике существуют две теории, обладающие огромной мощью и представляющие большой интерес: квантовая теория и теория относительности. Своими корнями названные теории уходят во взаимно исключающие группы явлений. Теория относительности применима к макроскопическим телам, например к звездам. Первичным в теории относительности считается явление совпадения, т. е. в конечном счете столкновения частиц. Сталкиваясь, частицы определяют или, по крайней мере, должны были бы определять (если бы они были бесконечно малыми) точку в пространстве-времени. Квантовая теория своими корнями уходит в мир микроскопических явлений, и с ее точки зрения явление совпадения или столкновения, даже если оно происходит между частицами, не обладающими пространственной протяженностью, нельзя считать первичным и четко локализованным в пространстве-времеви. Обе теории—квантовая теория и теория относительности — оперируют различными математическими понятиями: первая — понятием четырехмерного риманова пространства, вторая — понятием бесконечномерного гильбертова пространства. До сих пор все попытки объединить обе теории оканчивались неудачей, т. е. не удавалось найти математическую формулировку теории, по отношению к которой квантовая теория и теория относительности играли бы роль приближений. Все физики считают, что объединение обеих теорий принципиально возможно и нам удастся в конце концов достичь его. Однако нельзя исключать и другую возможность — что нам не удастся построить теорию, объединяющую квантовую механику и теорию относительности. Приведенный пример показывает, что ни одну из названных возможностей — объединение двух теорий и конфликт между ними — нельзя отбрасывать заранее.

Чтобы получить хотя бы намек, какую же из двух альтернатив нам следует, в конце концов, ожидать, притворимся чуточку более невежественными, чем мы являемся в действительности, и опустимся на более низкий уровень знания. Если, оставаясь на этом уровне знания, мы будем в состоянии обнаружить возможность слияния наших теорий, то можно с уверенностью сказать, что и на истинном уровне наших знаний такое слияние также окажется возможным. С другой стороны, обнаружив конфликт на более низком уровне знаний, мы не сможем исключить возможность существования непримиримо конфликтующих теорий и после возвращения на истинный уровень наших знаний. Уровень знания и степень нашего интеллектуального развития изменяются непрерывно, и маловероятно, чтобы сравнительно слабая вариация этой непрерывной функции изменяла имеющуюся в нашем распоряжении картину мира, внезапно превращая ее из несогласованной в последовательную [1]).

[1]) Эту мысль я написал после больших колебаний. Я убежден, что в эпистемологических дискуссиях полезно отказаться от представления об исключительно высоком положении уровня человеческого интеллекта на абсолютной шкале. В ряде случаев полезно рассматривать достижения, доступные и при уровне развития, свойственном отдельным видам животных. Я полностью отдаю себе отчет в том, что идеи, приведенные в тексте доклада, очерчены слишком бегло и не подвергались достаточно критическому обсуждению, чтобы их можно было считать надежными.

Высказанной только что точке зрения противоречит тот факт, что некоторые теории, ошибочность которых нам заведомо известна, позволяют получать удивительно точные результаты. Если бы мы знали немного меньше, то круг явлений, объясняемых этими «ложными» теориями, казался бы нам достаточно большим для того, чтобы уверовать в их «правильность». Однако эти теории мы считаем «ошибочными» именно потому, что, как показывает более тщательный анализ, они противоречат более широкой картине, и, если таких теорий обнаружено достаточно много, они непременно вступают в конфликт друг с другом. Не исключена и другая возможность: теории, которые мы, опираясь на достаточно большое, по нашему мнению, число подтверждающих фактов, считаем «верными», на самом деле являются «ошибочными» потому, что противоречат более широкой, вполне допустимой, но пока еще не открытой теории. Если бы дело обстояло именно так, мы должны были бы ожидать конфликта между нашими теориями, когда число их превысит определенный уровень и они будут охватывать достаточно широкий круг явлений. В отличие от уже упоминавшегося догмата веры физика-теоретика эту мысль следовало бы назвать «кошмаром» теоретика.

Рассмотрим несколько примеров «ошибочных» теорий, дающих, вопреки своей ошибочности, удивительно точное описание различных групп явлений. Если не быть чересчур придирчивым, то некоторые подробности, относящиеся к этим примерам, можно опустить. Успех первых основополагающих идей Бора в теории строения атома был весьма ограниченным, как, впрочем, и успех эпициклов Птолемея. Теперь мы находимся в более выгодном положении и можем точно указать все явления, которые допускают описание в рамках этих примитивных теорий. Мы не можем утверждать ничего подобного о так называемой теории свободных электронов, которая дает удивительно точную картину свойств большинства, если не всех, металлов, полупроводников и изоляторов. В частности, теория свободных электронов объясняет тот факт (который так и не удалось объяснить на основе «настоящей теории»), что удельное сопротивление изоляторов может в 10^{26} превосходить удельное сопротивление металлов. Более того, не существует экспериментальных данных, которые бы убедительно показали, что сопротивление конечно при условиях, когда, согласно теории свободных электронов, оно должно было бы обращаться в бесконечность. Тем не менее мы убеждены, что эта теория представляет собой лишь грубое приближение и при описании явлений, происходящих в твердых телах, ее должна была бы заменить более точная картина.

Достигнутые к настоящему времени успехи позволяют считать, что ситуация с теорией свободных электронов несколько тревожна, но отнюдь не свидетельствует о каких-то непреодолимых противоречиях. Теория свободных элементов заставляет нас сомневаться в другом: насколько мы можем доверять численному совпадению между теорией и экспериментом как показателю правильности теории. К такого рода сомнениям мы привыкли.

Гораздо больше трудностей и сомнений возникло бы, если бы в один прекрасный день нам удалось построить теорию сознания или разработать теоретическую биологию, столь же непротиворечивую и убедительную, как и существующие ныне теории неодушевленного мира. Если говорить о биологии, то законы наследственности Менделя и последующее развитие генетики вполне можно считать зачатками такой теории. Более того, не исключено, что кому-нибудь удастся обнаружить некий абстрактный аргумент, свидетельствующий о конфликте между такой теорией и общепринятыми основами физики. Аргумент этот может быть столь абстрактным, что упомянутый конфликт нельзя будет разрешить в пользу одной из теорий с помощью эксперимента. Такая ситуация сильно пошатнула бы нашу веру в существующие теории и в реальность создаваемых нами понятий. Мы испытали бы чувство глубокого разочарования в поисках того, что я назвал «абсолютной истиной». Причина, по которой подобную ситуацию нельзя считать заранее исключенной, состоит в том, что нам в принципе неизвестно, почему наши теории «работают» так хорошо. Их точность может еще не свидетельствовать об их правильности и непротиворечивости. Автор данного доклада убежден, что нечто подобное возникает при попытке сравнить современные законы наследственности с физическими законами.

Я хотел бы закончить более радостной нотой. Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы.

Я хотел бы поблагодарить Поляни, который давно уже оказывает глубокое влияние на мою точку зрения в связи с проблемами эпистемологии, и Баргмана за дружескую критику, способствовавшую достижению ясности. Я очень признателен также Шимони, просмотревшему рукопись данного доклада и обратившему мое внимание на статьи Пирса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dubislav W.*, Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, Junker und Dünnhaupt Verlag, Berlin, 1932.
2. *Polanyi M.*, Personal Knowledge, University of Chicago Press, Chicago, 1958, p. 188.
3. *Hilbert D.*, Abhandl. Math. Sem., Univ. Hamburg, **157** (1922).
4. *Hilbert D.*, Gesammelte Werke, Springer Verlag, Berlin, 1935.
5. *Schrödinger E.*, Über Indeterminismus in der Physik, J. A. Barth, Leipzig, 1932.
6. *Dubislav W.*, Naturphilosophie, Junker und Dünnhaupt, Verlag, Berlin, 1933, Kap. 4.
7. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 521 (1949). (Статья 1 данной книги.)
8. *Deutsch M.*, Daedalus, **87**, 86 (1958).
9. *Peirce C. S.*, Essays in Philosophy of Science, The Liberal Arts Press, New York, 1957, p. 237.
10. *Schrödinger E.*, What is Life?, Cambridge University Press, Cambridge, 1945, p. 31. (Имеется перевод: *Шредингер Э.*, Что такое жизнь с точки зрения физики?, ИЛ, 1947.)
11. *Wigner E.*, Proc. Amer. Phil. Soc., **94**, 422 (1950). (Статья 12 данной книги.)
12. *Margenau H.*, The Nature of Physical Reality, McGraw-Hill, New York, 1950, ch. 8.
13. *Dirac P. A. M.*, Quantum Mechanics, 3rd Ed., Clarendon Press, Oxford, 1947. (Имеется перевод: *Дирак П. А. М.*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.)
14. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin, 1932. (Имеется перевод: *Иоганн фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964.)
15. *Dicke R. H*,, Amer. Sci., **25** (1959).
16. *Born M.*, *Jordan P.*, Zs. Phys., **34**, 858 (1925).
17. *Born M.*, *Heisenberg W.*, *Jordan P.*, Zs. Phys., **35**, 557 (1926).